Proyecto MaTEX

Aplicación de las Derivadas

Fco Javier González Ortiz

Directorio

D.L.:SA-1415-2004

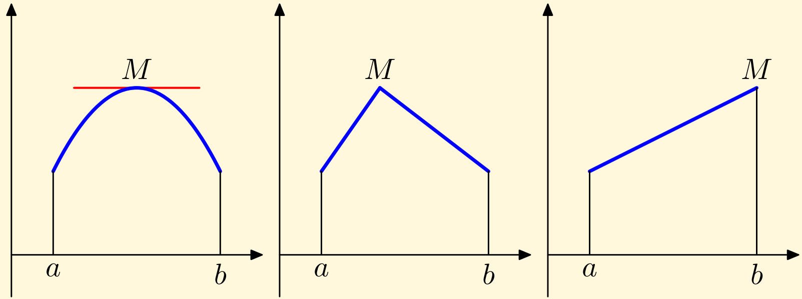
ISBN: 84-688-8267-4

Tabla de Contenido

1. Extremos de funciones

1.1. Máximos y mínimos absolutos o globales

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a; b]$, alcanza un máximo y un mínimo en dicho intervalo.
Observa las siguientes gráficas:



El máximo y el mínimo absoluto solamente pueden estar situados:

a) En puntos donde $f'(x) = 0$.

b) En puntos donde $f'(x)$ no está definida.

c) O en los extremos del intervalo

Interesa por tanto determinar los puntos donde la derivada valga cero o bien no esté definida. A estos puntos los llamaremos puntos críticos.

- **Puntos Críticos.**

Definición 1.1 *Decimos que c es un punto crítico cuando*

$$f'(c) = 0 \qquad o \qquad f'(c) \text{ no existe}$$

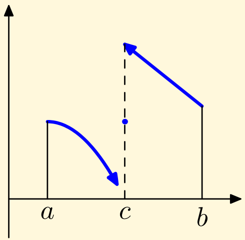
Se entiende que la función f debe ser continua en c.

- **Método de búsqueda de extremos globales**

Para la búsqueda de los extremos globales de una función f continua en el intervalo cerrado $I = [a, b]$ seguiremos los siguientes pasos:

1. Buscamos los puntos críticos de f en $[a, b]$, esto es, los puntos en que $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe. Estos puntos serán $x_1, x_2, \cdots, x_n$
2. Añadimos a esa lista los extremos del intervalo $[a, b]$,
$$a, x_1, x_2, \cdots, x_n, b$$
3. Evaluamos la función en todos los puntos de esa lista.

► Atención : Si la función no es continua el método anterior no es válido, ya que los valores de la función en los puntos críticos no determinan nada.



Ejemplo 1.1. Encontrar los puntos críticos $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo $[-1, 2]$

Solución: Hallamos f', $f'(x) = 2x$ como

$$f'(x) = 2\,x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

se tiene que el punto $c = 0$ es un punto crítico de f en $[-1, 2]$. □

Ejemplo 1.2. Encontrar los puntos críticos $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo $[1, 2]$

Solución: Hallamos f', $f'(x) = 2x$ como

$$f'(x) = 2\,x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

como $c = 0 \notin [1, 2]$ la función f no tiene puntos críticos en $[1, 2]$. □

Ejemplo 1.3. Encontrar los puntos críticos en el intervalo $[-1, 1]$ de

$$f(x) = |x|$$

Solución: Siendo

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

Hallamos f',

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Como $f'(0^-) = -1$ y $f'(0^+) = 1$ son distintas, $f'(0)$, no existe y $x = 0$ es el único punto crítico de f en $[-1, 1]$. □

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 1.4. Encontrar en el intervalo $[-1, 2]$ los valores extremos de

$$f(x) = x^2 - 1$$

Solución:

Hallamos f', $f'(x) = 2\,x$ como

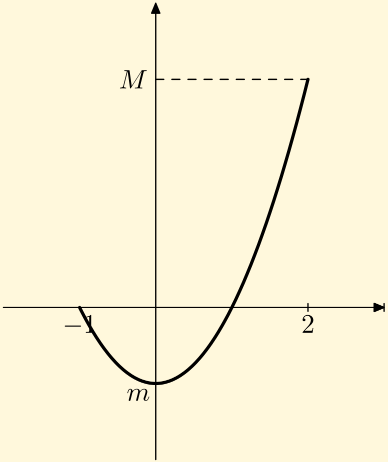
$$f'(x) = 2\,x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

se tiene que el punto $c = 0$ es el único punto crítico de f en $[-1, 2]$. Realizamos una tabla con los extremos del intervalo y los críticos encontrados

x	-1	0	2
$f(x)$	0	-1	3

Los valores extremos absolutos en $[-1, 2]$ son:

$$x_{min} = 0 \qquad x_{max} = 2$$



□

Ejemplo 1.5. Encontrar los valores extremos en el intervalo $[-1, 1]$ de

$$f(x) = |x|$$

Solución:

Siendo

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

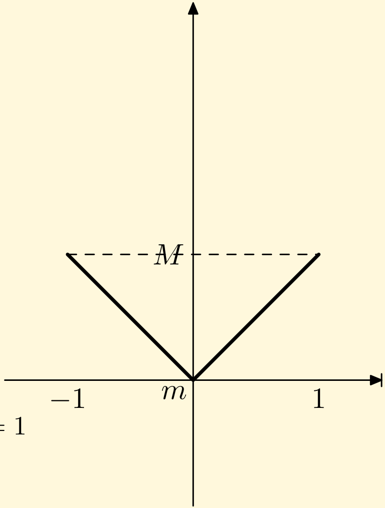
$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$f'(0)$, no existe y $x = 0$ es el único punto crítico de f en $[-1, 1]$.

x	-1	0	1
$f(x)$	1	0	1

Los valores extremos en $[-1, 1]$ son:

$x_{min} = 0 \qquad x_{max1} = -1 \qquad x_{max2} = 1$



□

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 1. Encontrar en el intervalo $[-1, 2]$ los valores extremos de

$$f(x) = \frac{1 - |x|}{1 + |x|}$$

Ejercicio 2. Encontrar en el intervalo $[-2, 2]$ los valores extremos de

$$f(x) = \frac{|1 + x|}{1 + x^2}$$

Test. Responde a las siguientes preguntas.

1. Si la tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es horizontal, entonces se cumple que $f'(a) = 0$

(a) Verdadero (b) Falso

2. Si existen $f'(a^-)$ y $f'(a^+)$ entonces existe $f'(a)$

(a) Verdadero (b) Falso

3. Si $x = a$ es un extremo local de f entonces $f'(a) = 0$

(a) Verdadero (b) Falso

4. Si $x = a$ es un extremo global de f entonces $f'(a) = 0$

(a) Verdadero (b) Falso

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

1.2. Máximos y mínimos relativos o locales

Definición 1.2 (Extremos Locales) *Sea f una función continua definida en $[a, b]$, y sea $c \in [a, b]$,*

1. *Mínimo Local Decimos que c es un mínimo local de f si hay un intervalo abierto J conteniendo a c donde se verifica*

$$f(x) \geq f(c) \qquad x \in J \cap [a, b]$$

2. *Máximo Local Decimos que c es un máximo local de f si hay un intervalo abierto J conteniendo a c donde se verifica*

$$f(x) \leq f(c) \qquad x \in J \cap [a, b]$$

Definición 1.3 (Extremos Globales) *Sea f una función con $Dom(f)$, y sea $c \in Dom(f)$,*

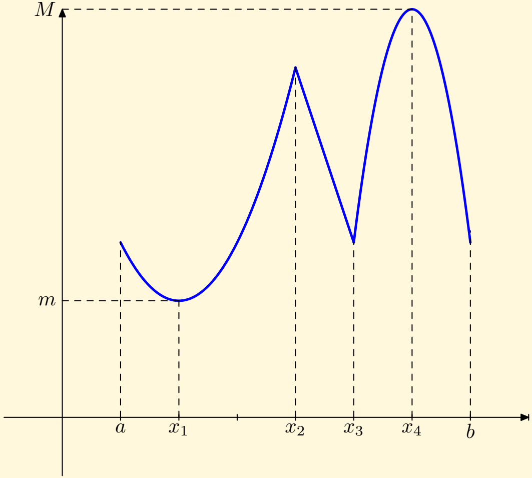
1. *Mínimo Global Decimos que c es un mínimo global de f en $Dom(f)$, si verifica*

$$f(x) \geq f(c) \qquad \forall x \in Dom(f)$$

2. *Máximo Global Decimos que c es un máximo global de f en $Dom(f)$, si verifica*

$$f(x) \leq f(c) \qquad \forall x \in Dom(f)$$

En el gráfico se representa una función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$, y se detallan los extremos locales y globales:



x_1 mínimo global $\qquad$ x_2 máximo local

x_3 mínimo local $\qquad$ x_4 máximo global

► ATENCIÓN Observar que en los extremos locales la derivada vale cero o no existe. Vamos a llamar a estos puntos críticos.

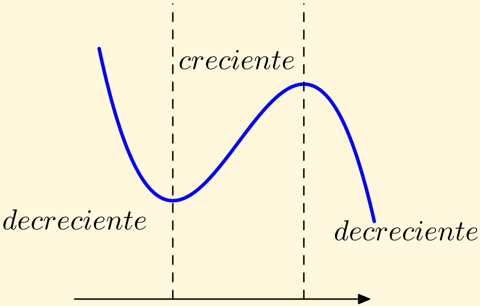
◄◄ ►► ◄ ► ◄ Doc Doc ► Volver Cerrar

- **Crecimiento y decrecimiento de funciones**

  Sea f una función definida en un intervalo I

► La función f es **estrictamente creciente** en el intervalo I si cumple

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



► La función f es **estrictamente decreciente** en el intervalo I si cumple

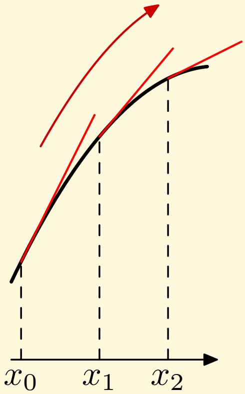
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Una función **monótona** es aquella que es *estrictamente creciente* o *estrictamente decreciente*. El análisis de la monotonía de una función si se hace de forma algebraica suele ser complicado . El estudio del signo de la derivada nos permite estudiar la monotonía de una forma más sencilla.

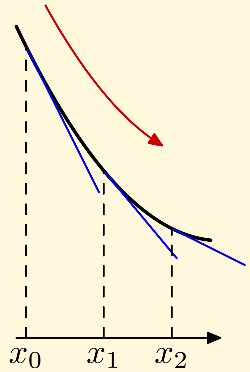
◄◄ ►►
◄ ►
◄ Doc Doc ►
Volver Cerrar

Teorema 1.1. (Test de Monotonía) Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $I = [a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b).

Test de crecimiento Si $f'(x) > 0$ en el intervalo (a, b), entonces f es estrictamente creciente en $[a, b]$.



Test de decrecimiento Si $f'(x) < 0$ en el intervalo (a, b), entonces f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.



Ejemplo 1.6. Estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo $[-1, 2]$

Solución: Hallamos f', $f'(x) = 2x$ como $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$, se tiene

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La función es estr. decreciente en $[-1, 0)$ y estr. creciente en $(0, 2)$. El punto $x = 0$ es un mínimo local y global en el intervalo $[-1, 2]$. $\square$

Ejercicio 3. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$ *b*) $g(x) = 4x^3 - x^4$

Ejercicio 4. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ *b*) $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Ejercicio 5. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

a) $f(x) = x^2 - \ln x^2$ *b*) $g(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-4)}$

2. Test de máximos y mínimos con la 1ª derivada

Teorema 2.1. (Test de Clasificación de Puntos Críticos) Sea $f(x)$ una función y c un punto crítico de f

a) Test de Máximo Local Si f' es positiva a la izquierda de c y f' es negativa a la derecha de c, entonces c es un máximo local.

b) Test de Mínimo Local Si f' es negativa a la izquierda de c y f' es positiva a la derecha de c, entonces c es un mínimo local.

c) Test de Inflexión Si $f'(c) = 0$ no cambia de signo a la izquierda y a la derecha de c, entonces c es un punto de inflexión.

Ejercicio 6. Clasifica los puntos críticos de las funciones:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$ *b*) $f(x) = (x-1)e^x$

Ejercicio 7. Clasifica los puntos críticos de las funciones:

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ *b*) $f(x) = x\,\ln x$

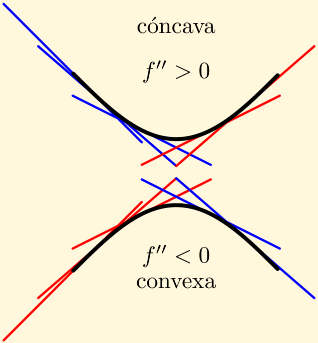
Ejercicio 8. Clasifica los puntos críticos de las funciones:

a) $f(x) = x\,\ln^2 x$ *b*) $f(x) = x^2\,\ln x$

3. La derivada segunda.Concavidad y convexidad.

Como hemos visto, la primera derivada f' nos da información de ciertas propiedades de la función f. Si derivamos f' obtenemos la derivada segunda que representamos por f''.

► ¿Qué nos dice la f''?. Así como $f' > 0$ nos informa de que f es creciente, de forma análoga $f'' > 0$ nos informa de que f' es creciente. Esto se traduce, como muestra la figura en que la curva está por encima de sus tangentes, y decimos que tiene concavidad hacia arriba o que es cóncava.



El caso de $f'' < 0$ nos informa de que f' es decreciente. Esto se traduce, como muestra la figura en que la curva está por debajo de sus tangentes, y decimos que tiene concavidad hacia abajo o que es convexa.

- Si $f'' > 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava, $\cup$.
- Si $f'' < 0$ en un intervalo, entonces f es convexa, $\cap$.

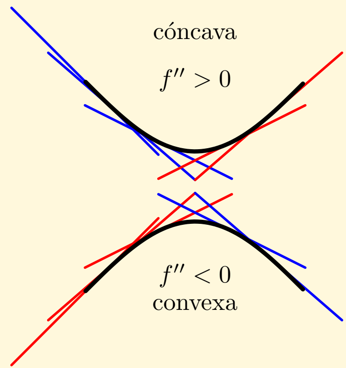
3.1. Clasificación de máximos y mínimos con f''

Sea $x = a$ un punto donde $f'(a) = 0$, es decir $x = a$ es un posible máximo o mínimo. Si la función admite derivada segunda, el signo de $f''(a)$, determina el tipo de extremo.

▶ Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, $x = a$ es un extremo con concavidad hacia arriba, luego es un mínimo relativo.

▶ Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, $x = a$ es un extremo con concavidad hacia abajo o convexa luego es un máximo relativo.

▶ En el caso $f''(a) = 0$, no podemos decir si $x = a$ es un máximo o mínimo relativo.

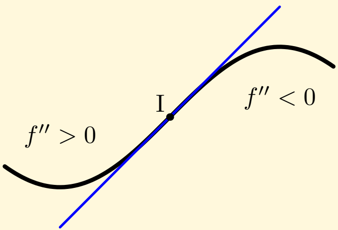


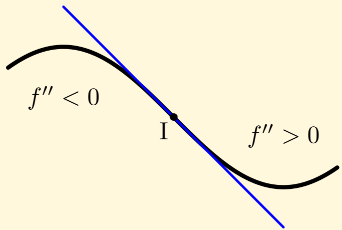
	Mínimo relativo			Máximo relativo		
		$x = a$			$x = a$	
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$\exists f(a)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\exists f(a)$	$\searrow$
f''		$f'' > 0$ Cóncava			$f'' < 0$ Cóncexa	

MaTEX
Derivada. Aplicaciones
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

3.2. Punto de Inflexión

Cuando en un punto $(a, f(a))$ la función cambia de concavidad se tiene un punto de inflexión, y la tangente en el punto, si existe, atraviesa la función.





		Punto Inflexión	
		$x = a$	
f''	$+$	$(\star)$	$-$
f	$\cup$	$\exists f(a)$	$\cap$

		Punto Inflexión	
		$x = a$	
f''	$-$	$(\star)$	$+$
f	$\cap$	$\exists f(a)$	$\cup$

► Atención Para que exista punto de inflexión es necesario que exista $f(a)$, y cambie de concavidad en a.
No es necesario que estén definidas $f'(a)$ ni $f''(a)$, pero si $f''(a)$ es continua en $x = a$ entonces debe ser $\star = 0$.

Ejemplo 3.1. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función, $f(x) = x^3 - 3x + 4$.

Solución: Hallamos f'' derivando dos veces,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \qquad f''(x) = 6x$$

Resolvemos $f'' = 0$, $f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	$f(0)$	$\cup$	

Punto de inflexión $I(0,4)$

□

Ejemplo 3.2. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función, $f(x) = x^4 - 6x^2$.

Solución: Hallamos f'' derivando dos veces,

$$f'(x) = 4x^3 - 12x \qquad f''(x) = 12x^2 - 12$$

Resolvemos $f'' = 0$,$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$	$f(-1)$	$\cap$	$f(1)$	$\cup$	

Puntos de inflexión
$I_1(-1,5)$
$I_2(1,5)$

□

Ejemplo 3.3. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solución: Es importante determinar el dominio. $Dom(f) = R - \{0\}$.
Hallamos f'' derivando dos veces,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Resolvemos $f'' = 0, f''(x) = \dfrac{2}{x^3} \neq 0 \quad \forall x$. No tiene puntos de inflexión.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	$\nexists$	$+$	
f		$\cap$	$\nexists$	$\cup$	

□

Ejercicio 9. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = (x-2)^4$ *b*) $g(x) = xe^x$

Ejercicio 10. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = \ln(x+1)$ *b*) $g(x = \dfrac{2-x}{x+1}$

Ejercicio 11. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones:

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

(b) $f(x) = x^4 - 2x^3$.

(c) $f(x) = x^4 + 2x^2$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

(e) $f(x) = e^x(x-1)$.

(f) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$.

Ejercicio 12. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene un punto de derivada nula en $(1,1)$, que no es un extremo relativo. Razonar el valor de a, b y c.

Ejercicio 13. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene un punto de derivada nula en $(1,1)$, que no es un extremo relativo. Razonar el valor de a, b y c.

Ejercicio 14. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene como tangente en el punto de inflexión $(1,0)$,la recta $y = -3x + 3$, y presenta un extremo en el punto de abcisa $x = 0$

Ejercicio 15. Hallar el valor de b y m para que la curva $y = x^3 + bx^2 + mx + 1$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0,1)$, y la pendiente de la recta tangente en ese punto valga 1.

Ejercicio 16. Representa una función continua con las siguiente información:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
f'		$+$	1	$+$	
f''		$-$	0	$+$	

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 17. Representa una función continua con las siguiente información:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	

Ejercicio 18. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene como tangente en el punto $(1, 1)$,la recta $y = -x + 2$, y presenta un extremo en el punto $(0, 2)$.

Ejercicio 19. Determinar el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, que tiene 1 y 2 como raíces, pasa por $(-1, 24)$ y tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

Test. Si una función $f(x)$ tiene recta tangente en el punto $(a, f(a))$ entonces existe $f'(a)$

(a) Verdadero (b) Falso

Test. Si $f'(c)$ no existe entonces existe $x = c$ es un punto crítico.

(a) Verdadero (b) Falso

Ejercicio 20. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las funciones:

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 4$.
(b) $f(x) = x^4 - 6x^2$.
(c) $f(x) = (x - 2)^4$.
(d) $f(x) = xe^x$.
(e) $f(x) = \ln(x + 1)$.
(f) $f(x) = \dfrac{2 - x}{x + 1}$.

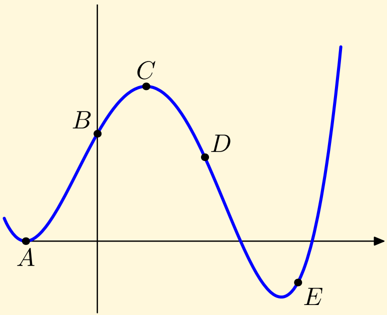
Ejercicio 21. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de

$$f(x) = x|x|$$

y comprueba que existe un punto de inflexión en $x = 0$ a pesar de que no existe $f''(0)$.

Ejercicio 22. En al figura se muestra el grafo de una función $f(x)$. Completar en al tabla el signo positivo, negativo o cero en los puntos del gráfico para f, f' y f''.

Punto	f	f'	f''
A			
B			
C			
D			
E			



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

4. Teoremas de funciones derivables

4.1. Teorema de Fermat

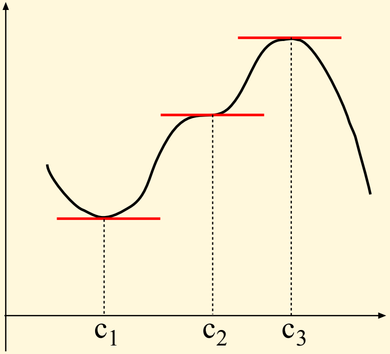
Teorema 4.1. Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo I. Si c un extremos local y existe $f'(c)$, entonces $f'(c) = 0$.

El recíproco de este teorema no es cierto, como se aprecia en el gráfico.

Los puntos c_1 y c_3 son extremos con tangente horizontal,

$$f'(c_1) = 0 \quad f'(c_3) = 0$$

Sin embargo en c_2, $f'(c_2) = 0$ y el punto no es extremo.



Inicio del Test Indicar si en general son verdaderas las siguientes afirmaciones:

1. Si $f(x)$ es continua en $x = a$ entonces es derivable en $x = a$

☐ Verdadero ☐ Falso

2. Si $f(x)$ es derivable en $x = a$ entonces $f(x)$ es continua $x = a$

☐ Verdadero ☐ Falso

3. Si c es un extremo local de $f(x)$ entonces $f'(c) = 0$

☐ Verdadero ☐ Falso

4. Si c es un extremo global de $f(x)$ entonces $f'(c) = 0$

☐ Verdadero ☐ Falso

5. Si $f'(c) = 0$ entonces c es un extremo local de $f(x)$

☐ Verdadero ☐ Falso

Final del Test

Puntos: Correctas

4.2. Teorema de Rolle

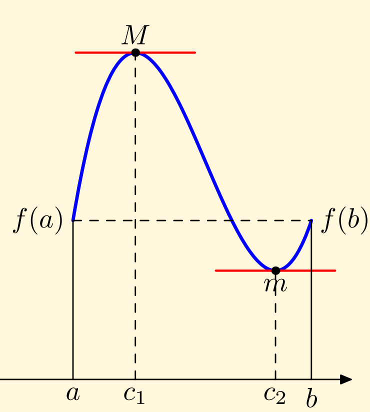
Teorema 4.2. (Teorema de Rolle)

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $I = [a, b]$

$$\begin{array}{c} f(a) = f(b) \\ \text{existe } f' \text{ en } (a,b) \end{array} \Longrightarrow \exists\, c \in (a,b) \text{ con } f'(c) = 0 \qquad (1)$$

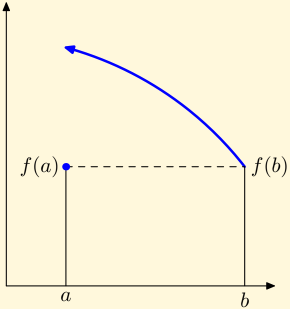
Interpretación gráfica. El teorema asegura para las funciones continuas en un intervalo cerrado, y derivables en todo punto interior del intervalo la **existencia** de al menos un punto donde la derivada se anula y por tanto tiene una tangente horizontal.

La figura muestra una función con dos puntos c_1 y c_2 donde se cumple.

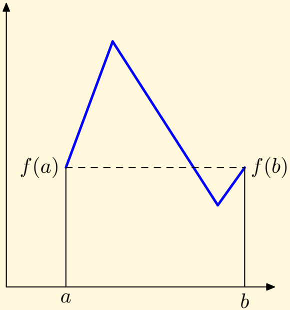


Observaciones al teorema de Rolle:

Si las función *no es continua* en el intervalo cerrado no se puede asegurar la **existencia** de al menos un punto donde la derivada se anula. Por ejemplo, en la figura se muestra una función continua en $(a, b]$ ya que es discontinua en el extremo a, y que cumple las demás condiciones.



Si las función *no es derivable* en todo punto interior del intervalo no se puede asegurar la **existencia** de al menos un punto donde la derivada se anula. Por ejemplo, en la figura se muestra una función que no es derivable y que cumple las demás condiciones..



Ejercicio 23. Comprobar que la función $f(x) = x^3 - 18x$ verifica el teorema de Rolle en el intervalo $[0, 3\sqrt{2}]$, y hallar el punto cuya existencia asegura el teorema.

Ejercicio 24. Calcular los valores de a, b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + c & x < 4 \\ -x^2 + 10x + b & 4 \leq x \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[2, 6]$.

Ejercicio 25. Calcular los valores de a, b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 1 \\ x^2 + cx & 1 \leq x \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 2]$.

Ejercicio 26. Calcular los valores de a, b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x + 1 & 0 \leq x < 1 \\ ax^2 + bx + c & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 2]$.

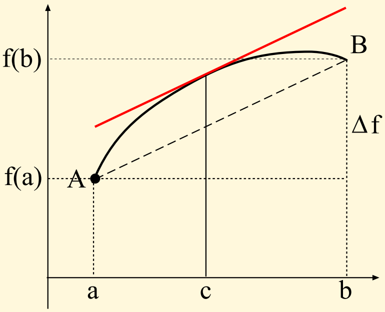
4.3. Teorema del Valor Medio

Teorema 4.3. (Teorema del Valor Medio)(Lagrange)

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $I=[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b). Entonces existe un número $c \in (a,b)$ que verifica

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{2}$$

Interpretación gráfica. El término de la derecha en (2) es la pendiente de la cuerda AB.
El teorema asegura que existe un punto $c \in (a,b)$ donde la tangente tiene la misma pendiente que la cuerda AB, es decir, donde la tangente es paralela a la cuerda.



Ejemplo 4.1. Comprobar que la función $f(x) = |x-2|$ no cumple las condiciones del teorema del valor medio en $[0,3]$.

Solución: Como

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & 0 \leq x \leq 2 \\ x-2 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

no es derivable en el punto $x = 2 \in (0,3)$, pues

$$f'(2-) = -1 \neq f'(2+) = 1$$

no se cumplen las condiciones del teorema del valor medio. □

Ejercicio 27. Aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[-1,2]$ a la función

$$f(x) = x^3$$

Ejercicio 28. Aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$ a la función

$$f(x) = 4x^2 - 5x + 1$$

Ejercicio 29. Para la función $f(x) = 3x^2$, encontrar un punto en que la tangente a la curva en dicho punto sea paralela a la cuerda que une los puntos en $(0,0)$ y $(4,48)$.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Siendo $f(x) = \dfrac{1-|x|}{1+|x|}$ en el intervalo $[-1, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x} & -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{1-x}{1+x} & 0 < x \leq 2 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1-x)^2} & -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{-2}{(1+x)^2} & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Como $f'(0^-) = 2 \neq f'(0^+) = -2$, $f'(0)$, no existe y $x = 0$ es el único punto crítico de f en $[-1, 2]$.

x	-1	0	2
$f(x)$	0	1	$-1/3$

Los valores extremos en $[-1, 2]$ son:

$$x_{min} = 2 \qquad x_{max} = 0$$

Ejercicio 1

Ejercicio 2. Siendo $f(x) = \dfrac{|1+x|}{1+x^2}$ en el intervalo $[-2, 2]$

$$f = \begin{cases} \dfrac{-1-x}{1+x^2} & -2 \leq x \leq -1 \\ \dfrac{1+x}{1+x^2} & -1 < x \leq 2 \end{cases} \qquad f' = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-1}{(1+x^2)^2} & -2 \leq x < -1 \\ \dfrac{-x^2-2x+1}{(1+x^2)^2} & -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Como $f'(-1^-) = -1/2 \neq f'(-1^+) = 1/2$, $f'(-1)$, no existe y $\boxed{x_1 = -1}$ es punto crítico de f en $[-2, 2]$. Resolvemos

$$f' = 0 \Longrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$$

Solo vale $x_2 = -1 + \sqrt{2} \in (-1, 2]$, luego otro punto crítico es

$$\boxed{x_2 = \sqrt{2} - 1} \quad \text{con} \quad f(\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} \approx 1{,}207$$

x	-2	-1	$\sqrt{2}-1$	2
$f(x)$	$1/5$	0	$1{,}207$	$3/5$

Los valores extremos en $[-2, 2]$ son:

$$x_{min} = -1 \qquad x_{max} = \sqrt{2} - 1$$

Ejercicio 2

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Prueba del Teorema 1.1. La demostración es fácil a partir del Teorema del Valor Medio. Sean $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Apliquemos el teorema en el intervalo $[x_1, x_2]$, existe un valor c cumpliendo

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

Entonces como $x_2 > x_1$ de la expresión anterior se sigue que $f(x_2) > f(x_1)$ y por tanto f es estrictamente creciente en $[a, b]$. ◀

Ejercicio 3.

a) Sea $f(x) = x^4 - 2x^2$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0, \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

b) Sea $g(x) = 4x^3 - x^4$. Resolvemos $g' = 0$

$$g'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 0 \Longrightarrow 4x^2(3-x) = 0 \Longrightarrow x = 0, 3$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
g'		$+$	0	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	0	$\nearrow$	27	$\searrow$	

Ejercicio 3

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 4.

a) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Con $Dom(f) = R - \{2\}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} < 0 \qquad \forall x \in R - \{2\}$$

Luego f es estrictamente decreciente.

b) Sea $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Resolvemos $g' = 0$

$$g'(x) = 3x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow x(3x-4) = 0 \Longrightarrow x = 0, 4/3$$

x	$-\infty$		0		$4/3$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(4/3)$	$\nearrow$	

Ejercicio 4

Ejercicio 5.

a) Sea $f(x) = x^2 - \ln x^2$. Con $Dom(f) = R - \{0\}$ Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

b) Sea $g(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-4)}$. Con $Dom(g) = R - \{-1, 4\}$. Resolvemos $g' = 0$

$$g'(x) = -\frac{2x-3}{(x+1)^2(x-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 3/2$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\searrow$	$f(\frac{3}{2})$	$\nearrow$	

Ejercicio 5

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6.

a) Sea $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1/4$$

x	$-\infty$		$1/4$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(1/4)$	$\nearrow$	

$$\text{Mínimo } m\left(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4})\right)$$

b) Sea $f(x) = (x-1)e^x$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = x\,e^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(0) = -1$	$\nearrow$	

$$\text{Mínimo } m\,(0, -1)$$

Ejercicio 6

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 7.

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$. Sea $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$. $Dom(f) = R - \{0\}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = 0 \Longrightarrow x^3 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

Punto crítico $x = \sqrt[3]{2}$, pues $x = 0 \notin Dom(f)$

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
f'		$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	$f(\sqrt[3]{2})$	$\nearrow$	

$$\text{Mínimo } m\left(\sqrt[3]{2}, f(\sqrt[3]{2})\right)$$

b) $f(x) = x \ln x$. Sea $f(x) = x \ln x$.

$$Dom(f) = (0, \infty)$$

Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = \ln x + 1 = 0 \Longrightarrow x = e^{-1}$$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(e^{-1})$	$\nearrow$	

$$\text{Mínimo } m(e^{-1}, -e^{-1})$$

Ejercicio 7

Ejercicio 8.

a) $f(x) = x\ \ln^2 x$. Sea $f(x) = x\ \ln^2 x$.

$$Dom(f) = (0, \infty)$$

Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = \ln x(\ln x + 2) = 0 \Longrightarrow x = 1, e^{-2}$$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Máximo $M(e^{-2}, 4e^{-2})$ Mínimo $m(1, 0)$

b) $f(x) = x^2\ \ln x$. Sea $f(x) = x^2\ \ln x$.

$$Dom(f) = (0, \infty)$$

Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = x(2\ln x + 1) = 0 \Longrightarrow x = e^{-1/2}$$

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(e^{-1/2})$	$\nearrow$	

$$\text{Mínimo } m(e^{-1/2}, -\frac{1}{2e})$$

Ejercicio 8

Ejercicio 9.

a) Sea $f(x) = (x-2)^4$. Hallamos f''

$$f'(x) = 4(x-2)^3 \qquad f''(x) = 12(x-2)^2$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12(x-2)^2 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$+$	0	$+$	
f		$\cup$	$f(2)$	$\cup$	

No tiene puntos de Inflexión.

b) Sea $g(x) = xe^x$. Hallamos g''

$$g'(x) = (x+1)e^x \qquad g''(x) = (x+2)e^x$$

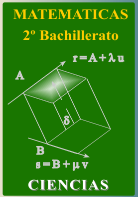
Resolvemos $g'' = 0$

$$g''(x) = (x+2)e^x = 0 \Longrightarrow (x+2) = 0 \Longrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
g''		$-$	0	$+$	
g		$\cap$	$f(-2)$	$\cup$	

Punto de inflexión $I(-2, -2e^{-2})$

Ejercicio 9



Ejercicio 10.

a) Sea $f(x) = \ln(x+1)$. $Dom(f) = (-1, \infty)$. Hallamos f''

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

- Como $f'' \neq 0$ no tiene puntos de inflexión.
- Como $f'' < 0 \quad \forall x \in Dom(f)$, es siempre convexa.

b) Sea $g(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$. $Dom(g) = R - \{-1\}$. Hallamos g''

$$g'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} \qquad g''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

- Como $g'' \neq 0$ no tiene puntos de inflexión.
- Concavidad y convexidad:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g''		$-$	$\nexists$	$+$	
g		$\cap$	$\nexists$	$\cup$	

Ejercicio 10

Ejercicio 11(a) Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Longrightarrow x = 1, 3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Máximo $M(1, 4)$ Mínimo $m(3, 0)$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Longrightarrow 6(x - 2) = 0 \Longrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	$f(2) = 2$	$\cup$	

Punto de inflexión $I(2, 2)$

□

Ejercicio 11(b) Sea $f(x) = x^4 - 2x^3$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0 \Longrightarrow 2x^2(2x-3) = 0 \Longrightarrow x = 0, 3/2$$

x	$-\infty$		0		$3/2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(3/2)$	$\nearrow$	

$$\text{Mínimo } m(\frac{3}{2}, f(\frac{3}{2})) = (\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 0 \Longrightarrow 12x(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0, 1$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$	$f(0)$	$\cap$	$f(1)$	$\cup$	

Puntos de inflexión $I_1(0,0) \quad I_2(1,-1)$

$\square$

Ejercicio 11(c) Sea $f(x) = x^4 + 2x^2$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x = 0 \Longrightarrow 4x(x^2+1) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

Mínimo $m(0,0)$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12x^2 + 2 \neq 0 \quad \forall x \Longrightarrow \text{ no se anula}$$

no tiene puntos de inflexión. Como

$$f''(x) > 0 \forall x$$

la función es cóncava.

$\square$

Ejercicio 11(d) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	

Máximo $M(0,1)$

$$f'' = 0 \Longrightarrow f''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$	$f(\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\cap$	$f(\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\cup$	

Puntos de inflexión $I_1(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$ $\quad I_2(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$

$\square$

MATEMATICAS
2º Bachillerato
r=A+λu
A
δ
B
s=B+μv
CIENCIAS
MaTEX
DERIVADA. APLICACIONES
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 11(e) Sea $f(x) = e^x(x-1)$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = xe^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

Mínimo $m(0,-1)$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f'(x) = (x+1)e^x = 0 \Longrightarrow (x+1) = 0 \Longrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	$f(-1)$	$\cup$	

Punto de inflexión $I(-1,-2e^{-1})$

$\square$

Ejercicio 11(f) Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. Con $Dom(f) = R - \{0\}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} \neq 0$$

Como $f'(x) > 0 \qquad \forall x \in Dom(f)$ es siempre creciente.
Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} \neq 0$$

Como $f'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in Dom(f)$ no tiene puntos de inflexión. □

Ejercicio 12. Como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \qquad f''(x) = 6x + 2a$$

- f pasa por $(1,1)$, luego $f(1) = 1 \Longrightarrow \boxed{1+a+b+c=1}$
- Derivada nula en $(1,1)$ luego $\Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{3+2a+b=0}$
- $(1,1)$ es punto de inflexión, luego $f''(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{6+2a=0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -1$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ Ejercicio 12

Ejercicio 13. Como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \qquad f''(x) = 6x + 2a$$

- f pasa por $(1, 1)$, luego $f(1) = 1 \Longrightarrow \boxed{\text{1+a+b+c=1}}$
- Derivada nula en $(1, 1)$ luego $\Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{3+2a+b=0}}$
- $(1, 1)$ es punto de inflexión, luego $f''(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{6+2a=0}}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -1$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ Ejercicio 13

Ejercicio 14. Como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$$

- $(1, 0)$ es punto de inflexión $\Longrightarrow f''(1) = 0 \Longrightarrow$ $\boxed{\text{6a+2b=0}}$
- $y = -3x + 3$ es tangente en $(1, 0)$, luego $f'(1) = -3$

$$\boxed{\text{3a+2b+c=-3}}$$

- f pasa por $(1, 0)$, luego $f(1) = 0 \Longrightarrow$ $\boxed{\text{a+b+c+d=0}}$
- En $x = 0$, hay un extremo, luego $f'(0) = 0 \Longrightarrow$ $\boxed{\text{c=0}}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 0 \quad d = 2$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ Ejercicio 14

Ejercicio 15. Como $f(x) = x^3 + bx^2 + mx + 1$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + m \qquad f''(x) = 6x + 2b$$

- $(0, 1)$ es punto de inflexión, luego $f''(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{2b=0}$
- Derivada en $x = 0$ vale 1, luego $\Longrightarrow f'(0) = 1 \Longrightarrow \boxed{m=1}$

Resolviendo el sistema se obtiene

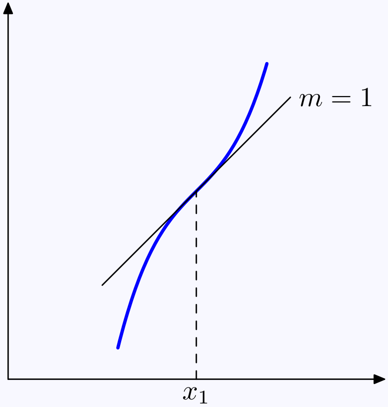
$$b = 0 \quad m = 1$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 + x + 1$ Ejercicio 15

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

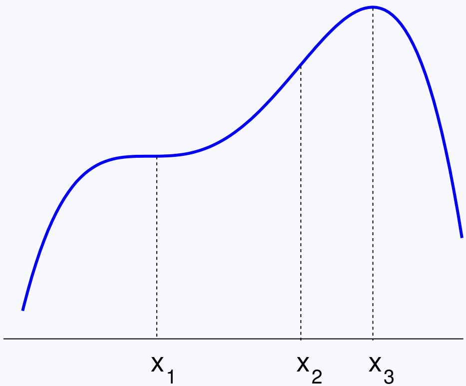
Ejercicio 16. Por ejemplo

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
f'		$+$	1	$+$	
f''		$-$	0	$+$	



Ejercicio 16

Ejercicio 17.



Ejercicio 17

Ejercicio 18. Como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$$

- f pasa por $(1,1)$, luego $f(1) = 1 \Longrightarrow \boxed{\text{a+b+c+d=1}}$
- f pasa por $(0,2)$, luego $f(0) = 2 \Longrightarrow \boxed{\text{d=2}}$
- La pendiente en $x = 1$ es $-1 \Longrightarrow f'(1) = -1 \Longrightarrow \boxed{\text{3a+2b+c=-1}}$
- Un extremo en $x = 0$, luego $\Longrightarrow f'(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{c=0}}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 0 \quad d = 2$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

Ejercicio 18

Ejercicio 19. Como $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad p''(x) = 6ax + 2b$$

- f pasa por $(-1, 24)$, luego $p(-1) = 24 \Longrightarrow \boxed{\text{-a+b-c+d=24}}$
- $x = 1$ es una raíz , luego $p(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{a+b+c+d=0}}$
- $x = 2$ es una raíz , luego $p(2) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{8a+4b+2c+d=0}}$
- Un mínimo en $x = 1$, luego $\Longrightarrow p'(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{3a+2b+c=0}}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = -2 \quad b = 8 \quad c = -10 \quad d = 4$$

y el polinomio pedido es $p(x) = -2x^3 + 8x^2 - 10x + 4$ Ejercicio 19

Ejercicio 20(a) Sea $f(x) = x^3 - 3x + 4$. Hallamos f''

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \qquad f''(x) = 6x$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	$f(0)$	$\cup$	

Punto de inflexión $I(0,4)$

$\square$

Ejercicio 20(b) Sea $f(x) = x^4 - 6x^2$. Hallamos f''

$$f'(x) = 4x^3 - 12x \qquad f''(x) = 12x^2 - 12$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$	$f(-1)$	$\cap$	$f(1)$	$\cup$	

Puntos de inflexión $I_1(-1, 5) \qquad I_2(1, 5)$

□

Ejercicio 20(c) Sea $f(x) = (x-2)^4$. Hallamos f''

$$f'(x) = 4(x-2)^3 \qquad f''(x) = 12(x-2)^2$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12(x-2)^2 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$+$	0	$+$	
f		$\cup$	$f(2)$	$\cup$	

No tiene puntos de Inflexión. $\square$

Ejercicio 20(d) Sea $f(x) = xe^x$. Hallamos f''

$$f'(x) = (x+1)e^x \qquad f''(x) = (x+2)e^x$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = (x+2)e^x = 0 \Longrightarrow (x+2) = 0 \Longrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	$f(-2)$	$\cup$	

Punto de inflexión $I(-2, -2e^{-2})$

□

Ejercicio 20(e) Sea $f(x) = \ln(x+1)$. $Dom(f) = (-1, \infty)$. Hallamos f''

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

- Como $f'' \neq 0$ no tiene puntos de inflexión.
- Como $f'' < 0 \qquad \forall x \in Dom(f)$, es siempre convexa.

$\square$

Ejercicio 20(f) Sea $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$. $Dom(f) = R - \{-1\}$. Hallamos f''

$$f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} \qquad f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

- Como $f'' \neq 0$ no tiene puntos de inflexión.
- Concavidad y convexidad:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	$\nexists$	$+$	
f		$\cap$	$\nexists$	$\cup$	

□

Ejercicio 21. Siendo

$$f(x) = x|x| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \end{array} \right.$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -2x & x < 0 \\ 2x & 0 < x \end{array} \right. \qquad f''(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -2 & x < 0 \\ 2 & 0 < x \end{array} \right.$$

Como

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	$\nexists$	$+$	
f		$\cap$	0	$\cup$	

El punto $x = 0$ es un punto de Inflexión y $f''(0)$ no existe. Ejercicio 21

Ejercicio 22.

Punto	f	f'	f''
A	0	0	$+$
B	$+$	$+$	$-$
C	$+$	0	$-$
D	$+$	$-$	$-$
E	$-$	$+$	$+$

Ejercicio 22

Prueba del Teorema 4.1. Razonamos para el caso en que c es un mínimo local. (análogo para el caso de un máximo local). Entonces existe un intervalo J, donde

$$f(x) \geq f(c) \qquad x \in J \cap I \tag{3}$$

La derivada por la izquierda en c, $f'(c^-)$ es

$$\left.\begin{array}{c} f(c+h) - f(c) \geq 0 \\ h < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(c^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

La derivada por la derecha en c, $f'(c^+)$ es

$$\left.\begin{array}{c} f(c+h) - f(c) \geq 0 \\ h > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(c^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Puesto que existe $f'(c) = f'(c^-) = f'(c^+)$, las desigualdades anteriores

$$0 \leq f'(c) = f'(c^-) = f'(c^+) \leq 0$$

implican que $f'(c) = 0$ ◀

Prueba del Teorema 4.2. Siendo continua en $[a, b]$, la función f tiene un valor máximo (absoluto) M y un valor mínimo (absoluto) m en este intervalo. Distinguimos dos casos:

- Si f es constante, es $M = m = f(a) = f(b) = c$ y $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.
- Si f no es constante en $[a, b]$, es $M > m$ y no puede verificarse $f(a) = f(b) = m = M$. Por tanto existe un punto interior de $[a, b]$ que es un máximo o un mínimo absoluto. Para ese valor, que también es un extremo relativo donde la función es derivable, se tiene por el teorema de Fermat que la derivada vale cero.

◀

Ejercicio 23. Siendo $f(x) = x^3 - 18x$ se cumplen las hipótesis en $[0, 3\sqrt{2}]$, pues:

- $f(x)$ es continua en $[0, 3\sqrt{2}]$ por ser una función polinómica.
- $f(x)$ es derivable en $(0, 3\sqrt{2})$ por ser una función polinómica.
- Como $f(0) = 0$ y $f(3\sqrt{2}) = 0$, la función tiene el mismo valor en los extremos del intervalo.

Luego el teorema asegura la **existencia** de al menos un punto $c \in (0, 3\sqrt{2})$ donde la derivada se anula. Como

$$f'(x) = 3\,x^2 - 18$$

$$f'(x) = 3\,x^2 - 18 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

luego el valor que asegura el teorema es $c = \sqrt{6}$ Ejercicio 23

Ejercicio 24. Siendo

$$f(x) = \begin{cases} ax + c & x < 4 \\ -x^2 + 10x + b & 4 \leq x \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} a & x < 4 \\ -2x + 10 & 4 < x \end{cases}$$

- $f(2) = 2a + c = f(6) = 24 + b \Longrightarrow \boxed{2a + c = 24 + b}$
- Continuidad en $[2, 6]$,

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 4^-} a\,x + c = 4a + c \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 4^+} -x^2 + 10x + b = 24 + b \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{4\,a + c - b = 24}$$

- Derivabilidad en $(2, 6)$,

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(4^-) & = & a \\ f'(4^+) & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{a = 2}$$

Resolviendo el sistema se tiene, $a = -\dfrac{1}{4}$,$b = -19$ y $c = -\dfrac{9}{4}$ Ejercicio 24

Ejercicio 25. Siendo

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x<1 \\ x^2+cx & 1 \leq x \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} a & x<1 \\ 2x+c & 1<x \end{cases}$$

- $f(-2) = -2a+b = f(2) = 4+2c \Longrightarrow \boxed{-2a+b=4+2c}$
- Continuidad en $[-2,2]$,

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 1^-} ax+b = a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 1^+} x^2+cx = 1+c \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{a+b=1+c}$$

- Derivabilidad en $(-2,2)$,

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(1^-) & = & a \\ f'(1^+) & = & 2+c \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{a=2+c}$$

Resolviendo el sistema se tiene, $a=-\dfrac{1}{4}$,$b=-1$ y $c=-\dfrac{9}{4}$ Ejercicio 25

Ejercicio 26. Siendo

$$f\left\{\begin{array}{ll} x^3-12x+1 & 0\leq x<1 \\ ax^2+bx+c & 1<x\leq 2\end{array}\right. \Longrightarrow f'\left\{\begin{array}{ll} 3x^2-12 & 0\leq x<1 \\ 2ax+b & 1<x\leq 2\end{array}\right.$$

- $f(0)=1=f(2)=4a+2b+c \Longrightarrow \boxed{1=4a+2b+c}$
- Continuidad en $[-2,2]$,

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^3-12x+1=-10 \\ f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} ax^2+bx+c=a+b+c\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{a+b+c=-10}$$

- Derivabilidad en $(-2,2)$,

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(1^-) & = & -9 \\ f'(1^+) & = & 2a+b\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{2a+b=-9}$$

Resolviendo el sistema se tiene, $a=20, b=-49$ y $c=19$. Para hallar el valor de $\xi\in(0,2)$ que cumple $f'(\xi)=0$, resolvemos la ecuación $f'(x)=0$.

$$f'(x)=0\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} 3x^2-12=0\Longrightarrow x=\pm 2\not\in(0,1) \\ 40x-49=0\Longrightarrow x=\dfrac{49}{40}\in(1,2)\end{array}\right.$$

luego el valor que asegura el teorema es $\xi=\dfrac{49}{40}$ con $f'(\xi)=0$ Ejercicio 26

Prueba del Teorema 4.3. Definimos la función

$$G(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

Se tiene que $G(a) = f(a)$ y $G(b) = f(a)$, con $G(x)$ continua y derivable por ser suma de funciones continuas y derivables. Aplicando el teorema de Rolle, existe un punto c donde $G'(c) = 0$. La derivada de $G(x)$ es

$$G'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

luego

$$G'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y de aquí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

◀

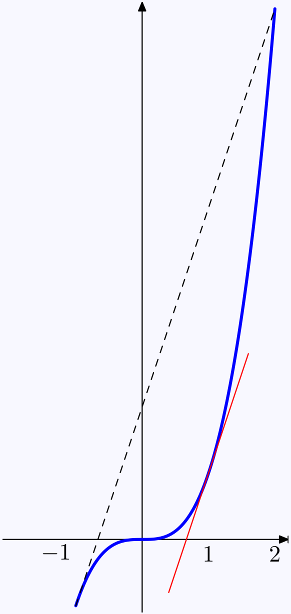
Ejercicio 27.

Siendo $f(x) = x^3$, aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 2]$ se obtiene

$$f(2) - f(-1) = f'(c) \cdot 3$$

y como $f'(c) = 3c^2$, se tiene

$$8-(-1) = 3c^2 \cdot 3 \Longrightarrow \boxed{c = 1} \in (-1, 2)$$



Ejercicio 27

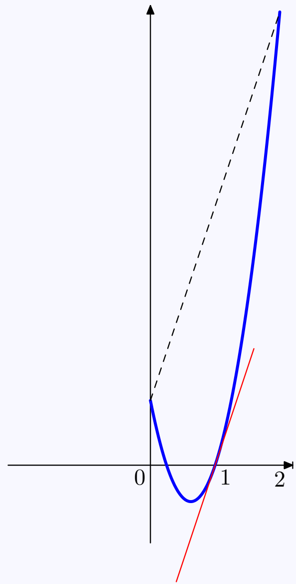
Ejercicio 28.

Siendo $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$, aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ se obtiene

$$f(2) - f(0) = f'(c) \cdot 2$$

y como $f'(c) = 8c - 5$, se tiene

$$7-(1) = (8c-5)\cdot 2 \Longrightarrow \boxed{c = 1} \in (0, 2)$$



Ejercicio 28

Ejercicio 29. Aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[0,4]$ se obtiene

$$f(4) - f(0) = f'(c) \cdot 4$$

y como $f'(c) = 6c$, se tiene

$$48 - 0 = 6c \cdot 4 \Longrightarrow \boxed{c = 2}$$

luego el punto en que la tangente a la curva es paralela a la cuerda que une los puntos en $(0,0)$ y $(4,48)$ es

$$P(2,12)$$

Ejercicio 29

Soluciones a los Tests

Solución al Test: Puede existir la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ sin que exista la derivada en dicho punto. Por ejemplo la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

tiene en el origen $x = 0$ como tangente vertical el eje OY y sin embargo

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

no existe $f'(0)$. Final del Test

Solución al Test: Es falso. Para que $x = c$ sea un punto crítico no basta que no exista $f'(c)$, además c tiene que estar en el dominio de f.

Final del Test

Índice alfabético